

MATHCAD 2000 - Computação simbólica

Transformações algébricas

NOTA: Computação simbólica pode ser executada de duas formas diferentes:

1. pelo menu Symbolics
2. através dos botões da barra de ferramentas simbólicas.

A primeira forma, embora talvez um pouco mais fácil de usar, é muito menos flexível, pois

Neste artigo nos limitaremos a dar exemplos do uso da barra Simbólico utilitário (você também pode usar o teclado mais conveniente, mas neste caso é usar o mouse).

Modelo	Descrição
$f(x) := \sum_{i=1}^3 (x - i)$	definição da função
$f(x) \rightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$	cálculo do simbólico simples ($f(x)$, Ctrl +.)

Observação:

$x := 4$	Se a variável X é definida (como aqui)
$f(x) \rightarrow 6$	esta expressões simbólicas, infelizmente, usa seu valor, em vez do símbolo X
$x := x$	para evitar tal situação deverá ser utilizado definição recursiva da variável
$f(x) \rightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$	agora ela está OK!

Palavras-chave - modificadores de computação simbólica

Em muitos casos, o operador de computação padrão simbólico \rightarrow é insuficiente e precisamos 'lembrar' Mathcad um padrão em que se deseja obter. Abaixo a lista dos modificadores mais comumente usados (veja a caixa simbólica)

expand - o desenvolvimento dos componentes

$$f(x) \text{ expand}, x \rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

factor - Fatoração - fatoração

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \text{ factor }, x \rightarrow (x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$$

$$\frac{1}{(x - 2)} - \frac{1}{(x - 1)} \text{ factor }, x \rightarrow \frac{1}{(x - 1) \cdot (x - 2)}$$

simplify - simplificar a expressão

$$\frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Se pode haver singularidade potencial
Matchad automaticamente não simplifica expressões

$$\frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} \text{ simplify} \rightarrow x + 1$$

Precisamos levá-lo, para tentar melhor, para simplificar a expressão

Material adicional

Às vezes, ajuda ainda mais, limitando o domínio

simplify, assume=real - afirma que as variáveis são números reais
simplify, assume=RealRange(a,b) - ou limitada em algum intervalo

$$\sqrt{x^2} \rightarrow \sqrt{x^2} \text{ sabe o que quer faz}$$

$$\sqrt{x^2} \text{ simplify} \rightarrow x \operatorname{sgn}(x)$$

mas aqui nós conseguimos simplificar solução no domínio complexo

$$\sqrt{x^2} \text{ simplify, assume = real} \rightarrow |x|$$

para os números reais - já sem o incômodo

$$\sqrt{x^2} \text{ simplify, assume = RealRange}(0, \infty) \rightarrow x$$

declaramos que x é não-negativo o que permite expressão ainda mais simplificada

Da mesma forma, mas de forma mais precisa, porque ele possui o campo de chave que permite que você especifique variável única. Vejo exemplo dado ao final do presente ponto.

Para as transformações trigonométricas modificador é útil

simplify, trig - geralmente para usar identidades trigonométricas geralmente conhecidas

$$\sin(x)^3 + \sin(x) \cdot \cos(x)^2 \text{ simplify, trig} \rightarrow \sin(x)$$

float,m - insere o resultado em termos de números reais de n dígitos significativos
o número m pode estar no intervalo $1 \leq m \leq 250$!!!

exemplo - a designação de 50 dígitos após o número decimal de π

$$\pi \text{ float ,51} \rightarrow 3.141592653589793238462643383279502884197169395$$

Material adicional

coeffs - coeficientes do polinômio

$$f(x) \rightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$f(x) \text{ coeffs , } x \rightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Compare índices abaixo

$$f(x) \text{ expand , } x \rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Outros modificadores são usados em cálculos mais avançados. Alguns deles serão apresentados no final o material.

Um atalho útil é Ctrl + Shift +. (segundo botão), que permite colocar qualquer modificador pelo teclado - mas ele deve ser digitado

NOTA: em uma região pode conseguir uma série de computação simbólica na ordem do agrupamento de modificadores

$$x^2 - \pi^2 \text{ factor} \rightarrow (x - \pi) \cdot (\pi + x) \text{ float , } 3 \rightarrow (x - 3.14) \cdot (x + 3.14)$$

assume X=real - X é um número real

assume X=RealRange(a,b) - X é um número real do intervalo (a, b)

$$\sqrt{x^2} \left| \begin{array}{l} \text{assume , } x = \text{RealRange}(-\infty, 0) \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \rightarrow \begin{array}{l} \text{simplificar a expressão no} \\ \text{pressuposto de que} \\ x \leq 0 \end{array}$$

Exercício 1:

1. Introduzir as funções abaixo mencionadas no formulário padrão (polinomial). Em seguida, fatore e veja quais são as raízes reais.

$$a) F(x) := \sum_{k=0}^3 \frac{3! \cdot 2^{3-k} \cdot x^k}{k! (3-k)!}$$

$$b) W(x) := \sum_{i=0}^5 [(-1)^i \cdot x^i]$$

2. Simplifique a expressão:

$$a) \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} + 2x - 5$$

$$b) \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$c) \cos(2a) + \sin(a)^2$$

3. Tente obter as fórmulas trigonométricas $\sin(x)$ e $\sin(2x)$.
4. Simplificar os elementos $\sqrt[3]{x^3}$ e $\sqrt[4]{x^4}$ para x positivo (ver resultados para x negativo)
5. Expandir o número $e = 2.718 \dots$ para 40 casas decimais.
-

Límites, derivadas e integrais

Modelo	Descrição
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$	Ctrl+L,sin(x)/x,tab,x,tab,0,Ctrl+.
$\frac{d}{dx} (x^3 + \sin(x)) \rightarrow \cos(x) + 3 \cdot x^2$	Shift+/,tab,'(apostrofe),x^3,espaço,+sin(x),tab,x,Ctrl+.
$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	Shift+7.e^-x^2,tab,x,tab,0,Ctrl+Shift+Z,Ctrl+.

series,X=x0,N - expandir função em série de Taylor
desenvolver termos de x na vizinhança do ponto x_0 até potência x^n

$$\sin(x) \text{ series ,x,10 } \rightarrow x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$$

Uma vez que tópico é bem conhecido de todos, divirta-se em introduzir símbolos adequados a partir da barra de ferramentas "Cálculo" ou use o atalho do Teclado apropriado.

Exercício 2:

1. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1) \cdot (x-2)(x-3)}{1+x+x^2+x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1) \cdot (x-2)(x-3)}{1+x+x^2+x^3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(x))}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2 \cdot i - 1} - \frac{1}{2 \cdot i} \right)$ g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$

2. Definir a função:

$$f(x) := \frac{1}{\frac{1}{1 + e^{x-1}}}$$

Desenhe o gráfico no intervalo de -1 a 3 Calcular o limite a esquerda e a direita para $f(x)$ em $x=1$. Faça um limite simples (O que Mathcad responde?).

3. Calcule a derivada primeira e segunda em x e simplificar as expressões obtidas possivelmente como na forma indicada:

a) $x^3 + x^2 + x + 1$ b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ (expandir para forma padrão)

c) $\ln(\sqrt{x})$ d) $\sin(\ln(x))$

e) $\tan(x)$ f) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ simplificar e comparar os resultados e) e f)

g) $\operatorname{asin}(x)$ h) $\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

4. Calcule a integral (definida ou indefinida)

a) $\int \sin x \, dx$ b) $\int \tan x \, dx$ (Aqui Mathcad dá um pequeno erro! Qual?)

c) $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$ (para $a > 0$) d) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} \, dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ g) $\iint x^2 \cdot (y+1) \, dx \, dy$

5. Expanda em série de Taylor as seguintes funções:

a) $\cos(x)$ b) $\sqrt{1+x}$ c) a^x (para $a > 0$)

Computação Simbólica em matrizes

ORIGIN:= 1

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{a \cdot d - b \cdot c} & -\frac{b}{a \cdot d - b \cdot c} \\ -\frac{c}{a \cdot d - b \cdot c} & \frac{a}{a \cdot d - b \cdot c} \end{pmatrix}$$

$|A| \rightarrow a \cdot d - b \cdot c$

A propósito de exemplo, mostra-se o modificador **substitute**
substitute,expr1=expr2 - tem-se expr2 no lugar de expr1

$$A^{-1} \text{ substitute, } a \cdot d - b \cdot c = \text{DET} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{\text{DET}} & -\frac{b}{\text{DET}} \\ -\frac{c}{\text{DET}} & \frac{a}{\text{DET}} \end{pmatrix}$$

outro exemplo

$$\text{C}(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad \text{função matricial}$$

$$|C(x)| \rightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2$$

há também muitas vezes necessidade de ajuda para simplificar expressões

$$|C(x)| \text{ simplify} \rightarrow 1$$

$$C(x)^{-1} \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad C(\alpha)^T \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Se nós podemos calcular a matriz inversa simbolicamente, o mesmo pode ser feito para resolver equações lineares simbolicamente.

Resolvendo equações de uma incógnita

solve, x - encontrar uma solução para a equação com relação à variável x.

NOTA: nas equações não use só = 0 em vez disso use Ctrl + = 0. Você pode omitir o lado direito se = 0, mas isto reduz a legibilidade da escrita, por isso não se recomenda essa simplificação.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4}}}{a} \\ \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4}}}{a} \end{pmatrix}$$

Muitas vezes, o resultado é tão complicado que Mathcad não pode fornecer soluções de forma concisa, se o resultado depende de vários parâmetros. Por exemplo, se semelhante ao método descrito acima é aplicado para a equação geral do terceiro grau depara-se com um problema! É muito mais fácil de obter

uma solução quando estamos operando em números específicos, mas o resultado também pode ser muito "desajeitado".

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \text{ solve, } x \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\left(\frac{2575}{729} - \frac{350\sqrt{6}}{243} \right)^{\frac{1}{3}}}{5} - \frac{2}{3} \\ \left(\frac{5\sqrt{6}}{9} - \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}} - 9 \left(\frac{5\sqrt{6}}{9} - \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{12 \left(\frac{5\sqrt{6}}{9} - \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}} + 9 \left(\frac{2575}{729} - \frac{350\sqrt{6}}{243} \right)^{\frac{1}{3}} - 5 + 5\sqrt{3}i + 9\sqrt{3} \left(\frac{2575}{729} - \frac{350\sqrt{6}}{243} \right)^{\frac{1}{3}} i}{18 \left(\frac{5\sqrt{6}}{9} - \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}}} \\ \frac{5 - 9 \left(\frac{2575}{729} - \frac{350\sqrt{6}}{243} \right)^{\frac{1}{3}} - 12 \left(\frac{5\sqrt{6}}{9} - \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}} + 5\sqrt{3}i + 9\sqrt{3} \left(\frac{2575}{729} - \frac{350\sqrt{6}}{243} \right)^{\frac{1}{3}} i}{18 \left(\frac{5\sqrt{6}}{9} - \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}}} \end{array} \right]$$

Se números concretos são suficientes para nós, vale a pena, além disso, usar o modificador **float,N**

$$x^3 + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } x \\ \text{float, } 6 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1.65063 \\ -0.174685 - 1.54687i \\ -0.174685 + 1.54687i \end{pmatrix}$$

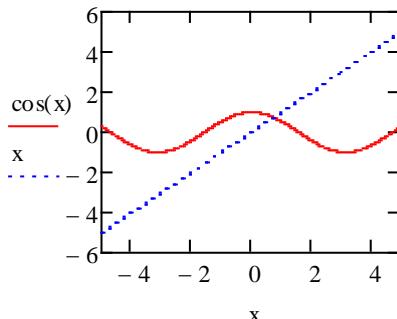
Quando temos uma equação transcendental, não é possível obter uma solução de forma concisa, sob a forma padrão. Em tais situações, Mathcad proporciona uma solução numérica dos 20 dígitos significativos. Se você não precisa de tal precisão novamente o modificador **float,N** é útil

Exemplo: Encontre os pontos de intersecção gráficos $y = \cos(x)$ e $y = x$

Ilustração gráfica deste exemplo

$$\cos(x) = x \text{ solve } \rightarrow 0.739085133215160641$$

$$\cos(x) = x \left| \begin{array}{l} \text{solve, x} \\ \text{float ,6} \end{array} \right. \rightarrow 0.73908$$



Infelizmente, nas equações transcendentais (mesmo as mais simples), Mathcad oferece a primeira solução encontrada.

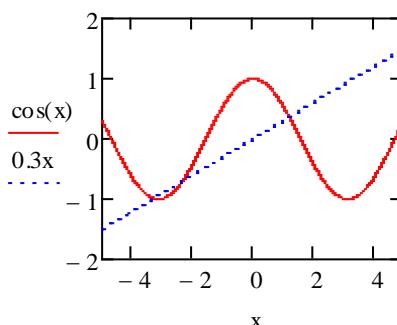
A equação ligeiramente modificada tem três raízes como solução, mas MathCAD dá apenas uma raiz.

Ilustração gráfica deste exemplo

$$\cos(x) = 0.3x \text{ solve } \rightarrow 1.20191316366618462$$

só não contam que deu Mathcad

$$\cos(x) = 0.3x \left| \begin{array}{l} \text{solve, x} \\ \text{float ,6} \end{array} \right. \rightarrow 1.2019$$



A família de soluções para funções tais como periódicos

$$\cos(x) = 0 \text{ solve, x } \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{não } \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

CONCLUSÃO: O Mathcad não resolve tudo por nós, automaticamente. Em muitos casos, devemos ajudá-lo com habilidade, o que nos obriga a compreender as questões e ter conhecimento suficiente de matemática no campo de aplicação. Precisamos também conhecer técnicas pouco mais avançadas do Mathcad. O problema retornará em exercícios subsequentes.

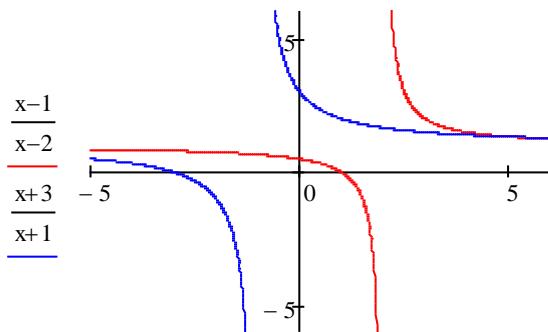
Para contar com o sucesso deste, infelizmente, **tem que saber "um pouco" de matemática.**

Resolvendo as desigualdades - por exemplo

$$\frac{x-1}{x-2} > \frac{x+3}{x+1} \text{ solve, } x \rightarrow x < -1 \vee 2 < x < 5$$

Esta solução tem a seguinte redação:

$$x \in (-\infty, -1) \cup (2, 5)$$



É visto a partir do gráfico que o Mathcad cumpriu esta tarefa.

Exercício 3:

1. Resolva a equação e desenhe o gráfico de cada item:

a) $625x^5 - 1875x^4 + 2125x^3 - 1125x^2 + 274x - 24 = 0$

b) $e^x = 3x$

2. Substituir nos dois exemplos acima, o sinal = em $>$ e resolver o correspondente. Desenhe o gráfico de cada item

3. Procurar ajuda de informações sobre a função misteriosa Lambert: $W(x)$ e $W(n,x)$ resultante

Esta foi uma versão do documento cujo original anexo nas próximas páginas está em polonês. Para realizar esta tradução utilizei tão somente o tradutor Google. Minhas desculpas pela falta de exatidão, não sei absolutamente nada de polonês. Além disso, utilizei o Mathcad 14 no lugar do 2000.
galdino.sergio@gmail.com.



MATHCAD 2000 - Obliczenia symboliczne

Przekształcenia algebraiczne

UWAGA: Obliczenia symboliczne można wywoływać na dwa różne sposoby:

1. poprzez menu Symbolics

2. poprzez przyciski paska narzędziowego Symbolic.

Pierwszy sposób, choć może trochę łatwiejszy w użyciu, jest o wiele mniej elastyczny, dlatego w niniejszym opracowaniu ograniczamy się do podania przykładów z zastosowaniem paska narzędziowego Symbolic (można też korzystać z klawiatury ale wygodniejsze w tym przypadku jest używanie myszy).

Wzór

$$f(x) := \prod_{i=1}^3 (x - i)$$

$$f(x) \rightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Opis

definicja funkcji

zwykłe obliczenie symboliczne ($f(x)$, **Ctrl+.**)

UWAGA:

$$X := 4$$

jeżeli zmienna X została zdefiniowana (tak jak tutaj)

$$f(X) \rightarrow 6$$

to w wyrażenях symbolicznych będzie niestety używana jej wartość a nie symbol X

$$X := X$$

Aby zapobiec takiej sytuacji należy zastosować **rekurencyjną definicję** zmiennej

$$f(X) \rightarrow (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot (X - 3)$$

teraz znów jest OK!!!!

Słowa kluczowe - modyfikatory obliczeń symbolicznych

W wielu przypadkach standardowy operator obliczeń symbolicznych \rightarrow jest niewystarczający i musimy "podpowiedzieć" Mathcadowi w jakiej postaci chcemy otrzymać wzór. Poniżej przedstawiamy listę najczęściej stosowanych modyfikatorów (zob. pasek Symbolic)

expand - rozwinięcie na składniki

$$f(x) \text{ expand } \rightarrow x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$$

factor - faktoryzacja - rozkład na czynniki

$$x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 \text{ factor } \rightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \text{ factor } \rightarrow \frac{1}{[(x-2)\cdot(x-1)]}$$

simplify - uprość wyrażenie

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)}$$

Jeżeli mogą wystąpić potencjalne osobliwości to Mathcad nie upraszcza wyrażeń automatycznie

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ simplify } \rightarrow x + 1$$

Musimy mu podpowiedzieć żeby starał się możliwie najlepiej uproszczyć wyrażenie

Materiał dodatkowy

Czasami należy pomóc jeszcze bardziej poprzez ograniczenie dziedziny

simplify, assume=real - mówi że zmienne są liczbami rzeczywistymi

simplify, assume=RealRange(a,b) - lub ograniczone w pewnym przedziale

$$\sqrt{x^2} \rightarrow (x^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

tu nie wie co z tym chcemy zrobić

$$\sqrt{x^2} \text{ simplify } \rightarrow \text{csgn}(x) \cdot x$$

tu upraszczamy ale otrzymujemy rozwiązanie w dziedzinie zespolonej

$$\sqrt{x^2} \text{ simplify, assume = real } \rightarrow \text{signum}(x) \cdot x$$

dla liczb rzeczywistych - już bez kłopotów

$$\sqrt{x^2} \text{ simplify, assume = RealRange}(0, \infty) \rightarrow x$$

podpowiadamy, że x jest niewjemne co pozwala jeszcze lepiej uproszczyć wyrażenie

Podobnie, ale bardziej precyzyjnie działa klucz **assume** bo pozwala określić dziedzinę pojedynczej zmiennej. Przykład podajemy na końcu tego punktu.

Do przekształceń trygonometrycznych przydatny jest modyfikator

simplify, trig - wykorzystaj ogólnie znane tożsamości trygonometryczne

$$\sin(x)^3 + \sin(x) \cdot \cos(x)^2 \text{ simplify, trig } \rightarrow \sin(x)$$

float,m - podaj wynik w postaci liczb rzeczywistych z m cyframi znaczącymi
liczba m może być z zakresu $1 \leq m \leq 250$!!!

przykład - wyznaczenie 50 cyfr po przecinku liczby π

$$\pi \text{ float, 51 } \rightarrow 3.14159265358979323846264338327950288419716939937511$$

Materiał dodatkowy

coeffs - podaj współczynniki wielomianu

$$f(x) \rightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$f(x) \text{ coeffs, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

porównaj współczynniki poniżej

$$f(x) \text{ expand, } x \rightarrow x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$$

Pozostałe modyfikatory stosowane są w bardziej zaawansowanych obliczeniach. Część z nich poznamy w dalszej części materiału.

Przydatnym skrótem klawiaturowym jest **Ctrl+Shift+**. (drugi przycisk), który pozwala na wprowadzanie dowolnych modyfikatorów z klawiatury - trzeba jednak wiedzieć co wpisać.

UWAGA: w jednym regionie można zrealizować serię obliczeń symbolicznych po kolej lub poprzez grupowanie modyfikatorów

$$x^2 - \pi^2 \text{ factor } \rightarrow (x - \pi) \cdot (x + \pi) \text{ float, 3 } \rightarrow (x - 3.14) \cdot (x + 3.14)$$

$$x^2 - \pi^2 \left| \begin{array}{l} \text{factor} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow (x - 3.14) \cdot (x + 3.14)$$

grupowanie - klikaj kolejne modyfikatory i dopiero potem je redaguj

Materiał dodatkowy

assume X=real - X jest liczbą rzeczywistą

assume X=RealRange(a,b) - X jest liczbą rzeczywistą z przedziału (a,b)

$$\sqrt{x^2} \left| \begin{array}{l} \text{assume, } x = \text{RealRange}(-\infty, 0) \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow -x \quad \text{uprość wyrażenie przy założeniu że } x \leq 0$$

Ćwiczenie 1:

1. Przedstaw funkcje podane poniżej w standardowej postaci (wielomianowej). Następnie rozłoż je na czynniki i sprawdź jakie są pierwiastki rzeczywiste.

$$\text{a) } F(x) := \sum_{k=0}^3 \frac{3! \cdot 2^{3-k} \cdot x^k}{k! (3-k)!} \quad \text{b) } W(x) := \sum_{i=0}^5 (-1)^i x^i$$

2. Uprość wyrażenia:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 3 \cdot x - 4}{x - 4} + 2 \cdot x - 5 \quad \text{b) } \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad \text{c) } \cos(2a) + \sin(a)^2.$$

3. Spróbuj otrzymać znane wzory trygonometryczne na $\sin(2a)$ i $\sin(a+b)$.

4. Uprość pierwiastki $\sqrt[3]{x^3}$ i $\sqrt[4]{x^4}$ dla x dodatnich (sprawdź wynik dla x ujemnych)

5. Rozwiń liczbę $e = 2.71\dots$ do 40 miejsc po przecinku.

Granice, pochodne i całki

Wzór

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$$

Opis

Ctrl+L, sin(x)/x, tab, x, tab, 0, Ctrl+.

$$\frac{d}{dx} (x^3 + \sin(x)) \rightarrow 3 \cdot x^2 + \cos(x)$$

Shift+/, 'apostrof, x^3, spacja, +, sin(x), tab, x, Ctrl+.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{1}{2} \right)$$

Shift+7, e^-x^2, tab, x, tab, 0, tab, Ctrl+Shift+Z, Ctrl+.

series,X=x0,N - rozwiń funkcję w szereg Taylora

rozwinięcie względem X w otoczeniu punktu x0 do rzędu X^N

$$\sin(x) \text{ series, x, 10} \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \frac{1}{362880} \cdot x^9$$

Ponieważ temat jest dobrze znany a cała zabawa polega na wywoływaniu odpowiednich symboli z paska narzędziowego "Calculus" lub używaniu odpowiednich skrótów klawiaturowych przechodzimy do ćwiczeń.

Ćwiczenie 2

1. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1+x+x^2+x^3} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1+x+x^2+x^3}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(x))} \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2 \cdot i - 1} - \frac{1}{2 \cdot i} \right) \quad g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$$

2. Zdefiniuj funkcję: $f(x) := \frac{1}{1 + e^{x-1}}$. Narysuj jej wykres w przedziale od -1 do 3. Oblicz lewo- i prawostronną granicę $f(x)$ dla $x = 1$. Sprawdź zwykłą granicę (co odpowie Mathcad?)

3. Oblicz pochodne pierwszego i drugiego stopnia po x i uprość otrzymane wyrażenia do możliwie zwiążej postaci:

a) $x^3 + x^2 + x + 1$ b) $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$ (tu rozwiń do zwykłej postaci)

c) $\ln(\sqrt{x})$ d) $\sin(\ln(x))$

e) $\tan(x)$ f) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ uprość i porównaj wyniki z e) i f)

g) $\arcsin(x)$ h) $\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

4. Oblicz całki (oznaczone lub nieoznaczone):

a) $\int \sin(x) dx$ b) $\int \tan(x) dx$ (tu Mathcad daje mały błąd!!! Jaki???)

c) $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx$ (dla $a > 0$) d) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ g) $\int \int x^2 \cdot (y+1) dx dy$

5. Rozwiń w szereg Taylora następujące funkcje:

a) $\cos(x)$ b) $\sqrt{1+x}$ c) a^x (dla $a > 0$)

Obliczenia symboliczne na macierzach

ORIGIN := 1

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{-b}{(a \cdot d - b \cdot c)} \\ \frac{-c}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{a}{(a \cdot d - b \cdot c)} \end{bmatrix}$$

$$|A| \rightarrow a \cdot d - b \cdot c$$

Przy okazji pokazujemy przykład zastosowania modyfikatora **substitute**

substitute,wyr1=wyr2 - podstaw *wyr2* zamiast *wyr1*

$$A^{-1} \text{ substitute, } a \cdot d - b \cdot c = \text{DET} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{\text{DET}} & \frac{-b}{\text{DET}} \\ \frac{-c}{\text{DET}} & \frac{a}{\text{DET}} \end{pmatrix}$$

innego przykładu

$$C(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad \text{macierz funkcyjna}$$

$$|C(x)| \rightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 \quad \text{tu też często trzeba dopomóc w upraszczaniu wyrażeń}$$

$$|C(x)| \text{ simplify } \rightarrow 1 \quad \text{teraz OK}$$

$$C(x)^{-1} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad C(\alpha)^T \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Jeżeli potrafimy obliczyć symbolicznie macierz odwrotną, to tym samym potrafimy symbolicznie rozwiązywać liniowe układy równań.

Rozwiązywanie równań z jedną niewiadomą

solve, x - znajdź rozwiązanie równania względem zmiennej **x**

UWAGA: w równaniach nie używamy zwykłego znaku = tylko **Ctrl+=**. Można nie podawać prawej strony jeśli jest =0 ale zmniejsza to czytelność zapisu, dlatego nie polecamy tego uproszczenia

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \text{ solve, x } \rightarrow \left[\frac{1}{(2 \cdot a)} \cdot \left[-b + (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right] \right] \quad \left[\frac{1}{(2 \cdot a)} \cdot \left[-b - (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right] \right]$$

Często wynik jest na tyle skomplikowany, że mathcad nie potrafi podać rozwiązania w zwięzlej postaci, jeśli wynik zależy od kilku parametrów. Na przykład, jeżeli podobną do opisanej wyżej metody zastosujemy do ogólnego równania 3-go stopnia to natrafimy na problem!!! Dużo łatwiej otrzymać rozwiązanie, gdy operujemy na konkretnych liczbach, ale wynik też może być bardzo "rozłazły".

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0 \text{ solve, x } \rightarrow$$

$$\left[\frac{-1}{3} \cdot (35 + 15 \cdot \sqrt{6})^{\left(\frac{1}{3}\right)} + \right]$$

3.(35)

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot (35 + 15\sqrt{6})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{5}{\left[6 \cdot (35 + 15\sqrt{6})^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right]} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot \\ \frac{1}{6} \cdot (35 + 15\sqrt{6})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{5}{\left[6 \cdot (35 + 15\sqrt{6})^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right]} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot \end{cases}$$

Jeżeli wystarczają nam konkretne wartości liczbowe, to warto dodatkowo zastosować modyfikator **float,N**

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } x \\ \text{float, } 6 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1.65063 \\ -1.174684 - 1.54687 \cdot i \\ -1.174684 + 1.54687 \cdot i \end{pmatrix}$$

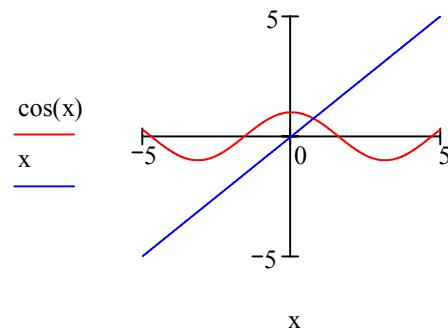
Gdy mamy równanie przestępne to nie jest możliwe otrzymanie zwięzłego rozwiązania w postaci wzoru. W takich sytuacjach Mathcad podaje rozwiązanie numeryczne z 20 cyframi znaczącymi. Jeżeli nie potrzebujemy aż takiej dokładności to znów przydatny jest modyfikator **float,N**

Przykład: Znaleźć punkty przecięcia wykresów
 $y = \cos(x)$ i $y = x$

$$\cos(x) = x \text{ solve, } x \rightarrow .73908513321516064166$$

$$\cos(x) = x \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } x \\ \text{float, } 6 \end{array} \right. \rightarrow .739085$$

graficzna ilustracja do tego przykładu



Niestety dla równań przestępnych (nawet najprostszych) Mathcad podaje **pierwsze** znalezione rozwiązanie.

Nieco zmodyfikowane zadanie ma trzy pierwiastki, ale Mathcad podaje tylko jedno

$$\cos(x) = 0.3x \text{ solve}, x \rightarrow 1.2019131636661846248$$

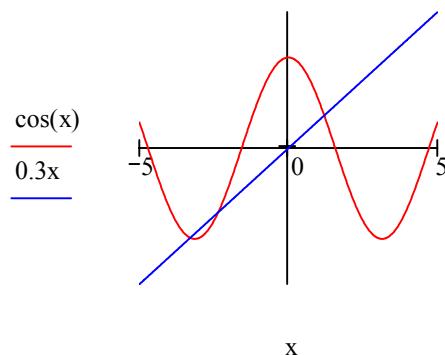
podobnie nie ma co liczyć aby Mathcad podał nam rodzinę rozwiązań np. dla funkcji okresowych

$$\cos(x) = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \quad \text{a nie } \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

WNIOSEK: Nie wszystko rozwiąże za nas Mathcad automatycznie. W wielu przypadkach musimy mu umiejętnie pomagać, co wymaga od nas dostatecznego rozumienia zagadnienia i znajomości matematyki w tym zakresie. Musimy też poznać nieco bardziej zaawansowane techniki w Mathcadzie. Do problemu wróćmy w kolejnych ćwiczeniach.

Aby liczyć na sukces to **niestety trzeba matkę choć trochę znać.**

graficzna ilustracja do tego przykładu

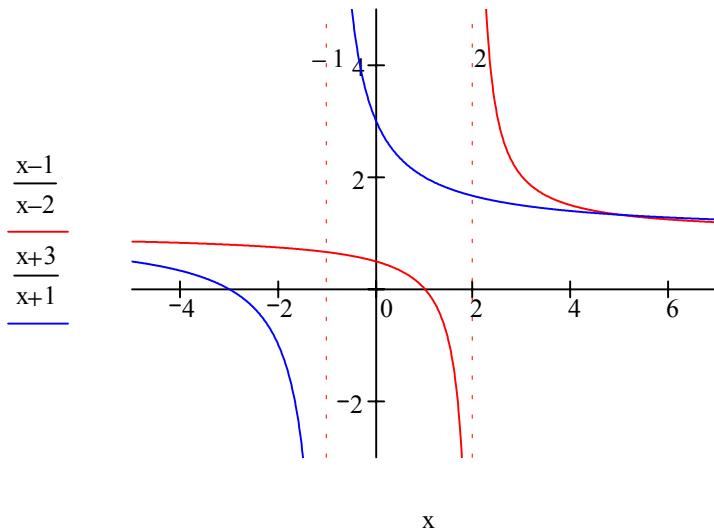


Rozwiązywanie nierówności - przykład

$$\frac{x-1}{x-2} > \frac{x+3}{x+1} \text{ solve}, x \rightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ (2 < x) \cdot (x < 5) \end{array} \right]$$

To rozwiązanie czytamy następująco:

$$x \in (-\infty, -1) \cup (2, 5)$$



z widać z przedstawionych wykresów Mathcad dobrze wywiązał się z tego zadania.

piechotę mielibyśmy trochę zmienia: 3 różne równania kwadratowe (tu akurat dwa z nich są ko liniowe) dla różnych zakresów tellej x, a po rozwiązaniu jeszcze syfikacja pierwiastków, czyli wierają się w założonym przedziale / sumie żmudne i podatne na błędy chunki, których można uniknąć posługując Mathcadem.

Ćwiczenie 3

1. Rozwiąż równania i sporządź odpowiednie wykresy:

$$\text{a)} \quad 625 \cdot x^5 - 1875 \cdot x^4 + 2125 \cdot x^3 - 1125 \cdot x^2 + 274 \cdot x - 24 = 0$$

$$\text{b)} \quad e^x = 3x$$

2. Zamień w powyższych dwóch przykładach znak = na > i rozwiąż odpowiednie

nierówności.

3. Poszukaj w helpie informacji na temat tajemniczych funkcji $W(x)$ i $W(n,x)$ otrzymanych

